

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД В УСЛОВИЯХ ШУМА

Торопов Е.А., Харченко Д.О.

Предложено обобщение системы Лоренца с помощью введения стохастических составляющих обобщенных сил. Три уравнения с аддитивными шумами сведены к единственному уравнению Ланжевена с аддитивным и двумя мультипликативными шумами. Исследованы экстремумы стационарного решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Показана возможность неравновесного перехода, индуцированного шумом. Построены фазовые диаграммы системы, которые в зависимости от интенсивностей шумов содержат как периодальную (переход второго рода), так и бинадальную (переход первого рода) области.

Введение

Известно, что наличие неравновесных переходов присуще многим физическим, химическим и биологическим системам [1-7]. Их описание проводится с помощью методов синергетики [1], основанных на обобщении понятия равновесного фазового перехода, который представляется зависимостью одной переменной - параметра порядка - от внешних параметров (например температуры). В отличие от этого, согласно теореме Рюэля-Такенса [8], синергетический переход имеет место в системах, описываемых как минимум тремя параметрами.

При рассмотрении неравновесных переходов решающую роль играет принцип соподчинения [1], состоящий в том, что один из параметров - параметр порядка (ПП) - изменяется со временем намного медленнее остальных, так что последние успевают релаксировать к своим средним значениям, эволюция которых определяется ПП. Этот принцип позволяет свести систему эволюционных уравнений для всех параметров к одному уравнению на ПП. В результате можно ввести функцию (синергетический потенциал), обобщающую понятие свободной энергии для равновесной системы. Условие минимума синергетического потенциала (аналогично условию минимума свободной энергии) определяет стационарное значение ПП. Поведение последнего похоже на поведение равновесного ПП при фазовом переходе второго рода.

Следует отметить, что традиционное применение принципа соподчинения предполагает пренебрежение флуктуациями параметров системы вблизи своих средних значений. Это оправдано лишь в тех случаях, если эти флуктуации малы, и их учет приводит к незначительным поправкам в чисто детерминистическом описании. Однако в реальности часто возникают ситуации, когда шум (моделирующий указанные флуктуации) нельзя считать малым, и его влияние может коренным образом изменить характер поведения системы. Такой эффект возникает в условиях мультипликативного шума [7]. Предлагаемая работа предпринята с целью описания поведения синергетической системы с учетом флуктуаций ее параметров. В разд. 1 выписаны общие соотношения, в разд. 2 рассмотрен синергетический переход в условиях аддитивного шума, а разд. 3 посвящен влиянию мультипликативного шума на характер неравновесного перехода, в заключении приводятся основные выводы работы.

1. Основные соотношения

Рассмотрим простейшую синергетическую систему, эволюция которой задается минимальным числом переменных: ПП η , сопряженные полем (СП) τ и управляющим параметром (УП) n , подчиняющихся уравнениям Лоренца [9]. Последние, дополненные стохастическими составляющими обобщенных сил, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{t_\eta} + \gamma\tau + \sigma_\eta \xi_\tau, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{\tau}{t_\tau} + g_\tau n\eta + \sigma_\tau \xi_\tau, \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{n_0 - n}{t_n} - g_n \tau\eta + \sigma_n \xi_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первые слагаемые в правых частях описывают автономную релаксацию величин η , τ , n к стационарным значениям $\eta = \tau = 0$, $n = n_0$ с временами релаксации t_η , t_τ , t_n ; γ представляет обратную обобщенную вязкость; положительные константы g_τ , g_n являются мерой обратной связи системы [4, 5]; ξ_η , ξ_τ , ξ_n - стохастические обобщенные силы соответственно для III, СИ и УП, являющиеся белыми гауссовскими шумами с нулевыми средними и дисперсиями $\langle \xi_i(0)\xi_j(t) \rangle = \delta(t)$; σ_η , σ_τ , σ_n - интенсивности соответствующих шумов.

Как указано во введении, при выполнении условий $t_\tau, t_n \ll t_\eta$ принцип соподчинения позволяет положить в (1) $\dot{\tau} = \dot{n} = 0$, сохраняя, однако, стохастические добавки. В результате система уравнений (1) сводится к единственному уравнению на III, которое при переходе к безразмерным величинам $t' \equiv t/t_\eta$, $\eta' \equiv \eta/\eta_g$, $v \equiv n_0/n_c$, $\xi \equiv t_\eta^{-1/2}\xi_\eta$, $\sigma'_\eta \equiv t_\eta^{1/2}\eta_g^{-1}\sigma_\eta$, $\sigma'_\tau \equiv \gamma t_\eta^{1/2}t_\tau(n_g)^{-1}\sigma_\tau$, $\sigma'_v \equiv \gamma^{1/2}t_n n_c^{-1}\sigma_n$, где введены характерные значения III $\eta_g^2 \equiv (t_\tau t_n g_\tau g_n)^{-1}$ и $n_c \equiv (t_\eta t_\tau g_\tau \gamma)^{-1}$, примет следующий вид (далее штрихи безразмерных величин опускаем):

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + \sigma_\eta \xi_\eta + \sigma_\tau G_\tau \xi_\tau + \sigma_v G_v \xi_v, \quad (2)$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени. В уравнении (2) введены безразмерный детерминистический синергетический потенциал

$$V \equiv V(\eta) = \frac{1}{2}[\eta^2 - v](1 + \eta^2) \quad (3)$$

и функции

$$G_\tau = (1 + \eta^2)^{-1}, \quad G_v = \eta(1 + \eta^2)^{-1} \quad (4)$$

Таким образом, выражение (2) представляет собой обобщенное уравнение Ланжевена, в котором детерминистическая составляющая обобщенной силы $f = -\partial V/\partial \eta$ определяется видом синергетического потенциала (3), а стохастическая - представляет сумму аддитивного ξ_η и двух мультипликативных шумов с соответствующими мультипликативными функциями (4).

Нахождение стационарных состояний системы сводится к отысканию максимумов функции распределения, являющейся стационарным решением уравнения Фоккера - Планка, отвечающего исходному уравнению Ланжевена [7]. В рассматриваемом случае уравнение (2) приводит к уравнению Фоккера - Планка, которое в исчислении Стратоновича имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}(\eta, t) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[V' - \frac{1}{2} G^2 G \right] \mathcal{A} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [G^2 \mathcal{A}(\eta, t)], \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по III η , $V \equiv V(\eta)$ из (3), а функция $G \equiv G(\eta)$ выражается через мультипликативные функции (4)

$$G^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{\eta^2} + \sigma_\tau^2 G_\tau^2 + \sigma_v^2 G_v^2 \quad (6)$$

Уравнение (5) получено с использованием того факта, что распределение для суммы независимых случайных величин, распределенных по Гауссу, тоже является гауссовым с квадратом дисперсии, равным сумме квадратов дисперсий исходных распределений [10]. Стационарное решение уравнения (5) дает искомую функцию распределения

$$\mathcal{P}_s(\eta) \propto \exp \left\{ -2 \left[\int \frac{V'(z)}{G^2(z)} dz + \sigma_\tau^2 \ln G_\tau(\eta) \right] \right\}, \quad (7)$$

где выражение в квадратных скобках с точностью до постоянного множителя определяет эффективный синергетический потенциал системы, находящейся в условиях мультипликативного шума. Из

выражения (7) видно, что эффективный потенциал может существенно отличаться от детерминистического (3). Подставляя в (7) формулы (3), (4), (6), легко можно получить явное выражение для функции распределения (или эффективного потенциала). Однако поскольку оно является громоздким, мы не приводим его вида для общего случая. Более просто записывается условие максимума функции (7) (или минимума соответствующего потенциала), которое сводится к двум уравнениям: $\eta = 0$ и

$$x^3 - vx^2 - \frac{\sigma_\eta^2}{2}x + \sigma_v^2 - \sigma_\tau^2 = 0, \quad x = 1 + \eta^2. \quad (8)$$

Решения уравнения (8) дают стационарные значения ПП в зависимости от интенсивностей шумов СП и УП и не зависят от шума ПП. Полученные в данном разделе соотношения используются далее при рассмотрении частных случаев.

2. Переход при аддитивном шуме

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда $\sigma_\eta = \sigma_\tau = \sigma_v = 0$. Тогда уравнения (1) сводятся к классической системе Лоренца [9], и уравнение (2) является чисто детерминистическим. Как известно [1], при отсутствии шумов в системе, описываемой потенциалом (3), наблюдается синергетический переход, аналогичный равновесному фазовому переходу второго рода. Действительно, легко видеть, что в этом случае уравнение (8) имеет два чисто мнимых корня $\eta^2 = -1$ и два, равных

$$\eta_{0\pm}^2 = v - 1. \quad (9)$$

Если значение параметра $v \leq 1$, то стационарное состояние системы задается единственным минимумом потенциала (3) в точке $\eta_0 = 0$, которое будем далее называть симметричной фазой. При $v > 1$ это состояние теряет устойчивость и появляются две новые устойчивые несимметричные фазы, задаваемые уравнением (9) и отвечающие двум минимумам (3). Из выражения (9) видно, что $\eta_{0\pm}^2$ монотонно растет с увеличением параметра v , начиная от нуля при $v = 1$, что и указывает на сходство с фазовыми переходами второго рода. Отметим, что для рассмотренного детерминистического перехода функция распределения (7) становится δ -образной $\mathcal{P}_s(\eta) \propto \delta\{V'(\eta)\}$.

Не трудно увидеть, что характер поведения системы качественно не меняется в условиях шума ПП, который является аддитивным ($\sigma_\eta \neq 0, \sigma_\tau = \sigma_v = 0$). Поскольку уравнение (8) не зависит от σ_η , стационарные состояния системы по-прежнему задаются минимумами (3), а роль шума сводится к случайному разбросу значений ПП вблизи стационарных. Функция распределения (7) в этом случае принимает вид $\mathcal{P}_s(\eta) \propto \exp(-2V/\sigma_\eta^2)$ и имеет один пик вблизи $\eta = 0$, если $v < 1$ (что отвечает симметричной фазе), и два симметричных пика вблизи точек (9) при $v > 1$ (две несимметричные фазы). Исходя из сказанного, далее будем полагать $\sigma_\eta = 0$ и исследуем более детально стационарные состояния неравновесной системы в присутствии мультипликативных шумов СП ξ_τ и ξ_v УП. Сначала рассмотрим влияние каждого из указанных шумов в отдельности, а затем - их совместное воздействие.

3. Влияние мультипликативного шума

1. Шум СП. В этом случае выполняется условие $\sigma_\eta = \sigma_v = 0$, и функция распределения (7) принимает вид

$$\mathcal{P}_s(\eta) \propto \exp\left[-2\frac{V_{eff}^*}{\sigma_\tau^2}\right], \quad (10)$$

где эффективный синергетический потенциал дается следующим выражением:

$$2V_{eff}^*(\eta) = \frac{1}{3}G_\tau(\eta)^{-3} - \frac{v}{2}G_\tau(\eta)^{-2} + \sigma_\tau^2 \ln G_\tau(\eta). \quad (11)$$

Если $v < 1 - \sigma_\tau^2$, то условие единственного минимума (11) определяет симметричную фазу системы $\eta = 0$. При $v > 1 - \sigma_\tau^2$ решения уравнения (8) отвечает двум несимметричным фазам системы $\eta_+ = -\eta_-$, при которых

функция распределения (10) имеет максимумы. На рис. 1 показана зависимость $\eta_+(\nu, \sigma_\tau)$. При малых значениях ν и σ_τ стационарные значения даются следующими зависимостями:

$$\eta_{\pm}^2 \approx \begin{cases} \sigma_\tau^2/3 - 1 + \frac{\nu}{3} \left(1 + 1/\sqrt{3}\right), \nu \rightarrow 0; \\ \nu - 1 + \sigma_\tau^2/\nu^2, \sigma_\tau^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12)$$

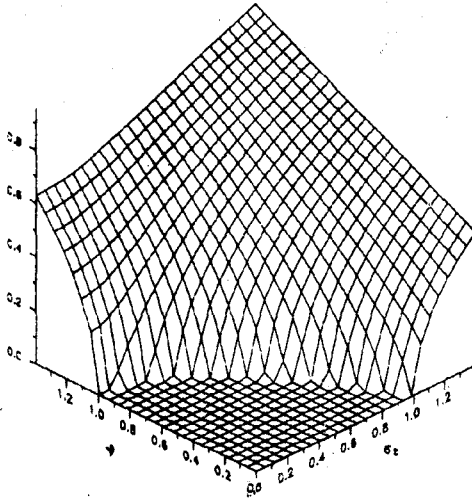


Рис. 1. Зависимость стационарного ПП η от параметра ν и интенсивности шума СП σ_τ (в безразмерных единицах)

Выражения (12) и рис. 1 указывают на наличие перехода второго рода при условии $\nu > 1 - \sigma_\tau^2$. Характерно, что при $\nu = 0$ наблюдается синергетический переход в несимметричное состояние, если $\sigma_\tau > \sigma_\tau^c = 1$, т.е. этот переход индуцирован исключительно шумом СП. Кроме того, при занулении σ_τ получаем детерминистический переход в состояние, определяемое выражением (9), рассмотренный в разд. 2.

2. Шум УП. Исследуем теперь стационарные состояния синергетической системы в присутствии шума УП ξ_ν , полагая в уравнениях (1), (2) $\sigma_\eta = \sigma_\tau = 0$. Аналогично предыдущему случаю, стационарная функция распределения ПП (7) дается выражением типа (10), где $\sigma_\tau, G_\tau, V_{eff}^\tau$ заменены соответственно на $\sigma_\nu, G_\nu, V_{eff}^\nu$. Эффективный потенциал при этом имеет следующий вид:

$$V_{eff}^\nu(\eta) = \frac{\eta^4}{4} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\eta^2\right) + \left(1 - \nu + \frac{\sigma_\nu^2}{2}\right) \ln \eta - \frac{\sigma_\nu^2}{2} \ln(1 + \eta^2) \quad (13)$$

Уравнение минимума (13) получаем, полагая в (8) $\sigma_\tau = 0$. Проведем анализ решений этого уравнения в зависимости от значений параметров ν и σ_ν . Нетрудно заметить, что кривая

$$\nu = 1 + \sigma_\nu^2/2 \quad (14)$$

определяет существование нулевого корня уравнения (8). Кроме того на линии (14) имеются еще два решения:

$$\eta_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \nu - 3 + \left[(\nu - 3)^2 - 4(4 - 3\nu) \right]^{1/2} \right\}, \quad (15)$$

которые нефизичны (так как η_{\pm}^2 комплексно), если $\nu < 4/3$, в точке $\nu = 4/3$ обращаются в нуль, а при $\nu > 4/3$ являются вещественными и $\eta_+ = -\eta_-$. Таким образом, в точке

$$\nu = 4/3, \sigma_\nu^2 = 2/3 \quad (16)$$

имеется кратный нуль уравнения (8). Из симметрии потенциала (13) легко убедиться, что при выполнении (14) нулевой корень даст минимум

этого потенциала, если $v < 4/3$, в то время как при $v > 4/3$ он отвечает его максимуму, а η_{\pm}^2 - двум минимумам.

Найдем далее условие существования кратных вещественных корней уравнения (8) в рассматриваемом случае шума УП. Оно задается двумя кривыми:

$$\sigma_{\text{шт}}^2 = 27 - 9v - \frac{v^3}{4} \pm \left[(27 - 9v - v^2/4)^2 - 8v^3 \right]^{1/2} \quad (17)$$

Одна из них (со знаком "-") выходит из точки $\sigma_v = v = 0$, другая (со знаком "+") - из $\sigma_v^2 = 54, v = 0$. Эти линии пересекаются в точке $v = 2, \sigma_v^2 = 8$. Можно убедиться также, что кривая σ_v^2 в (17) и линия (14) касаются в точке (16).

В завершение анализа решений необходимо отметить, что эффективный синергетический потенциал (13) имеет особенность $\ln \eta$ при $\eta \rightarrow 0$. Легко видеть, что $V_{\text{eff}}^v(0) \rightarrow -\infty$ ниже кривой (14) и $V_{\text{eff}}^v \rightarrow +\infty$ выше нее. Согласно классификации, приведенной в [7], первый случай отвечает наличию в системе абсолютно поглощающей границы в точке $\eta = 0$, а второй - абсолютно отражающей. На самой кривой (14) граница пропадает вследствие зануления коэффициента перед $\ln \eta$ в (18).

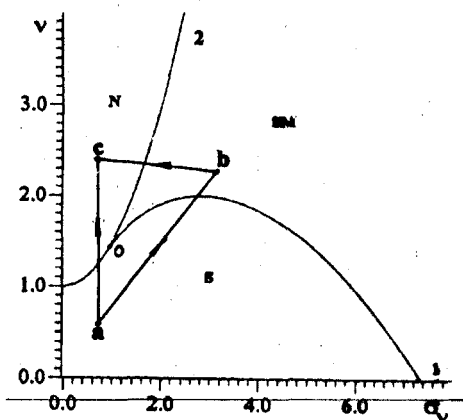


Рис. 2. Фазовая диаграмма системы в переменных $v - \sigma_v$: 1 - кривые (17), 2 - кривая (14); S - область устойчивой симметричной фазы; SM - область устойчивой симметричной и метастабильных несимметричных фаз; O - трикритическая точка

Проведенный выше анализ позволяет построить фазовую диаграмму рассматриваемой системы (рис. 2) в условиях шума УП. Здесь область S (ниже кривых (14), (17)) отвечает стабильной симметричной фазе ($\eta = 0$), а область N (выше (14)) - стабильным несимметричным фазам. Область SM, заключенная между (14) и (17), соответствует наличию абсолютно устойчивой симметричной фазы и метастабильных несимметричных. Точка пересечений линий 1 и 2 (рис. 2) является трикритической (16). Если систему перевести из состояния a в состояние c по пути $a \rightarrow c$, то мы имеем переход второго рода. При реализации $a \rightarrow b \rightarrow c$ система попадает в область стабильной несимметричной фазы a через метастабильное состояние b. Характерно, что при этом эффективный потенциал (13) скачком изменяет свое значение в точке $\eta = 0$ от $-\infty$ в области до нуля на кривой (14), а затем - от нуля до $+\infty$ в области N. Такое поведение не позволяет характеризовать данный переход как переход первого рода, хотя метастабильная несимметричная фаза на данной кривой скачком превращается в стабильную η_{\pm}^2 в (15). Заканчивая рассмотрение синергетической системы при наличии шума УП, приведем бифуркационные диаграммы (рис. 3), демонстрирующие поведение

стационарных состояний системы в зависимости от интенсивности σ_v при фиксированных значениях v . Видно, что на границе области S при $\sigma_v^2 > 2/3$ происходит скачкообразное появление двух экстремальных точек потенциала (18), одна из которых отвечает неустойчивому состоянию (η_u), а вторая - метастабильному (η_m).

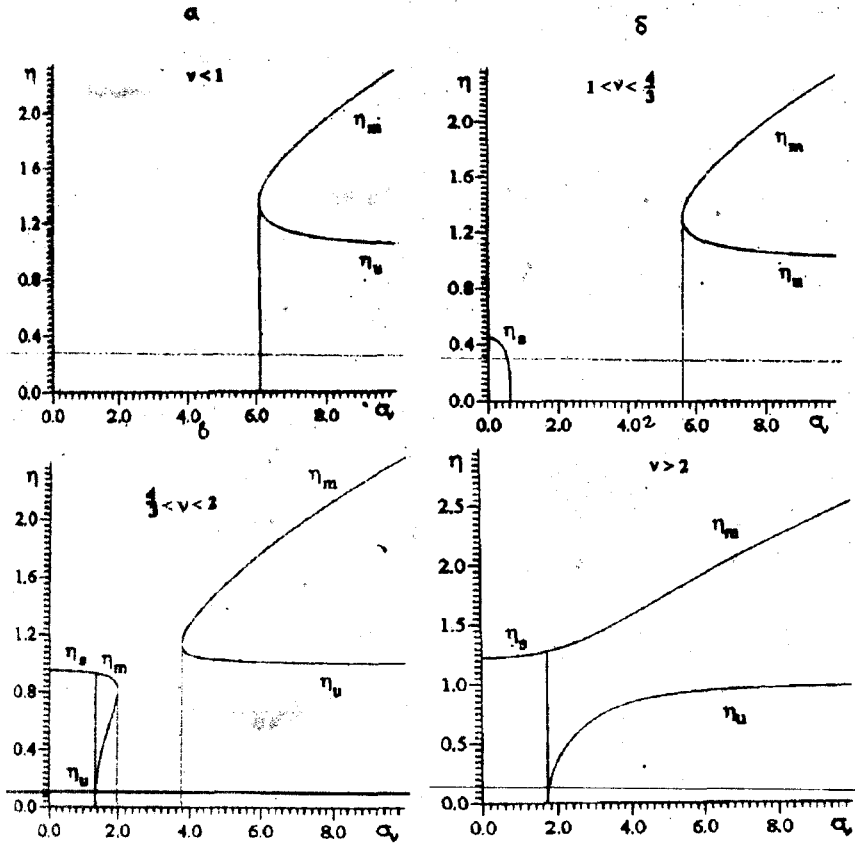


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для стационарных значений ПП в зависимости от интенсивности шума УП (при различных значениях v): η_s - устойчивое, η_m - метастабильное и η_u - неустойчивое решения.

3. Совместное использование СП- и УП- шумов. Рассмотрим теперь более общий случай, учитывающий оба мультипликативных шума ξ_τ и ξ_v в уравнениях (1), (2). Стационарная функция распределения при этом, как и ранее, получается из формулы (7) при $\sigma_\eta = 0$ в виде (10), где V_{eff}^r , σ_τ , заменяется на V_{eff} , σ_v . Эффективный потенциал при этом имеет вид

$$V_{eff} = \frac{\eta^4}{4} + \frac{2-v-\alpha^2}{2}\eta^2 + (1-\alpha^2)(1-\alpha^2-v)\ln(\alpha^2 + \eta^2) + \frac{\sigma_v^2}{2} \ln(\alpha^2 G_\tau + \eta G_v), \quad \alpha = \sigma_\tau / \sigma_v^2. \quad (18)$$

Как указывалось в разд. 1, выражение (18) пропорционально эффективному синергетическому потенциалу системы. Отметим, что последний в пределе $\sigma_v \rightarrow 0$ с точностью до несущественной постоянной сводится к V_{eff}^r из (11), а при занулении σ_τ к V_{eff}^v в (13). Однако, в отличие от (13), величина (18) имеет конечный предел при $\eta \rightarrow 0$. Кроме того, вводя параметр

$$a = 1 - \alpha, \quad (19)$$

а также перенормированные величины:

$$\tilde{\sigma} \equiv \sigma_v/a, \tilde{v} \equiv v/a, \tilde{\eta}^2 = (\eta^2 + 1)/a - 1, \quad (20)$$

можно при $\alpha < 1$ представить выражение (18) в виде $\tilde{V}_{eff}/\tilde{\sigma}^2$, где \tilde{V}_{eff} получаем из (13) заменой σ_v, v, η согласно (20). Таким образом, роль шума СП при этом сводится к тому, что минимальное значение перенормированного ПП равно $(a^{-1} - 1)^{1/2}$, т.е. область расходимости ($\tilde{\eta} = 0$) является недоступной для системы.

Условие экстремума (18) или функции распределения (7) распадается на два уравнения, одно из которых тривиально $\eta = 0$, а второе дается (8). Анализ этого уравнения в общем случае двух мультипликативных шумов показывает, что линия существования нулевого корня задается выражением, отличающимся от (14) добавкой $-\sigma_v^2$ в правой части. Кратные вещественные корни лежат на кривой, которая лежит ниже предыдущей, касаясь с ней в точке

$$v = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\sigma_v^2}{4}\right), \quad \sigma_v^2 = \frac{2}{3} \left(1 - 2\sigma_v^2\right), \quad (21)$$

являющейся трикритической.

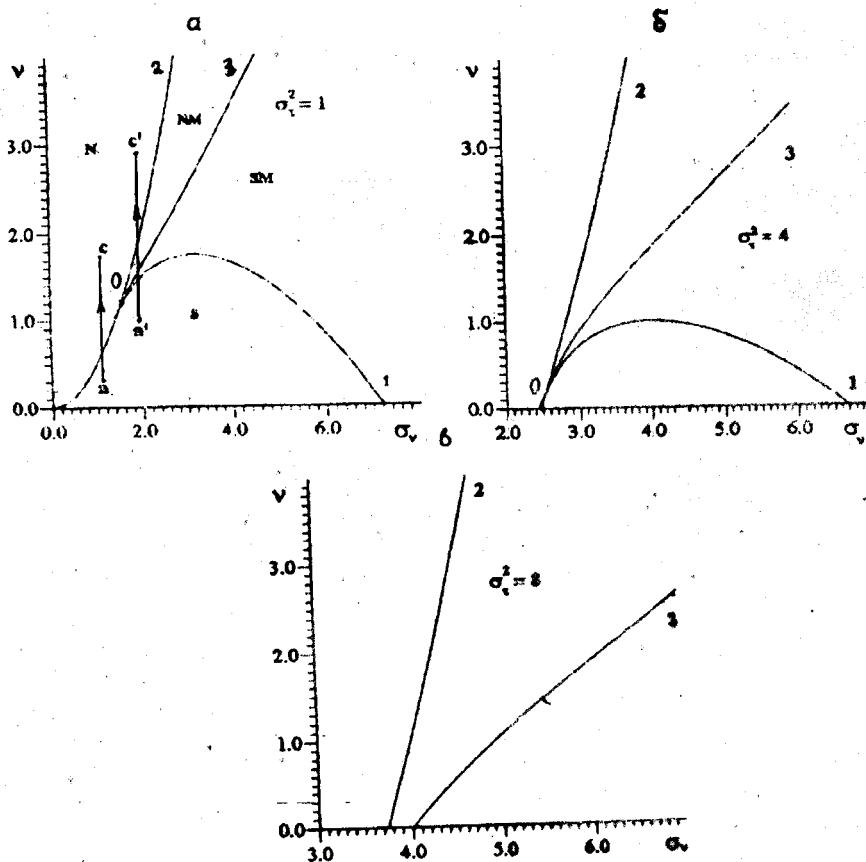


Рис. 4. Фазовые диаграммы в переменных $v - \sigma_v$ при фиксированных значениях σ_τ :
 1 - линия существования кратных корней (8), линия нулевого решения (8),
 2 - линия существования симметричной и несимметричной фаз; S, N, SM (см. рис. 2);
 3 - линия существования симметричной и несимметричной фаз; S, N, SM (см. рис. 2);
 NM - область устойчивых несимметричных и метастабильной симметричной фаз;
 O - трикритическая точка (21).

Вид фазовой диаграммы в переменных $\sigma_\tau - v$ при фиксированных значениях σ_v приведен на рис. 4. Видно, что если $\sigma_\tau^2 < 4$ (рис. 4а), то она качественно не отличается от представленной на рис. 2. В случае $\sigma_\tau^2 = 4$ трикритическая точка (21) лежит на оси σ_v (рис. 4б), а при $\sigma_\tau^2 > 4$ (рис. 4в) попадает в область отрицательных v (на рисунке не приведена).

Кроме того, вследствие конечности потенциала (18) при всех конечных значениях $\Pi\Pi$, на фазовой диаграмме появляется линия (кривая 2 на рис. 4) сосуществования симметричной и несимметричной фаз (бинодаль). Ниже этой линии (область SM на рис. 4а) стабильной является симметричная фаза, а несимметричная - метастабильной. Выше бинодали (NM , рис. 4а) ситуация меняется на противоположную, и на линии 3 (спинодаль) происходит абсолютная потеря устойчивости симметричной фазы. Выше спинодали (область N) система находится в устойчивом несимметричном состоянии. Таким образом, при фиксированных σ_t, σ_v , (линия $a \rightarrow c$ на рис. 4) наблюдается фазовый переход (при изменении v) второго рода, если σ_v меньше критического (см. (21)). Когда превышает это значение, то система претерпевает переход первого рода (линия $a' \rightarrow c'$, рис. 4).

Заключение

Приведем основные выводы, полученные в работе. Как показано в разд. 1, система стохастических уравнений (1) для трех параметров ($\Pi\Pi$, $СП$, $УП$) в рамках принципа соподчинения сводится к единственному уравнению на $\Pi\Pi$ (2). Это уравнение представляет собой обобщенное уравнение Ланжевена с аддитивным и двумя мультипликативными шумами. Из выражения стационарной функции распределения (7) видно, что наличие мультипликативного шума может коренным образом изменить характер поведения системы. Результаты разд. 3 показывают, что при наличии шума $СП$ не только понижает порог детерминистического перехода (разд. 1), но и приводит к переходу второго рода, индуцированному шумом. Влияние шума $УП$ состоит в появлении метастабильной несимметричной фазы одновременно с абсолютно устойчивой симметричной. Совместное воздействие $СП$ - и $УП$ -шумов заключается в том, что, кроме устранения расхожимости эффективного синергетического потенциала, на фазовой диаграмме системы появляются области как спинодального (второго рода), так и бинодального (первого рода) типа неравновесного фазового перехода.

SUMMARY

A generalization of Lorenz system is proposed by introducing stochastic terms of generalized forces. Three equations containing additive noises are reduced to single Langevin equation with additive and two multiplicative ones. Extremuma of stationary solution of corresponding Fokker-Planck equation are studied. A possibility of noise-induced nonequilibrium transition is shown. Phase diagrams of system are obtained. They have both spinodal (second order transition) and binodal (first order one) regions in dependence of noise intensities.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаген Г. Синергетика. - М.: Мир, 1980, 404с.
2. Haken H. Generalized Ginzburg - Landau equations for phase transitions like phenomena in lasers, nonlinear optics, hydrodynamics and chemical reactions. //Zs. Phys. - 1976, vol. B21, p.105.
3. Lefever R. Noise-induced Transitions in biological systems. //In: Stochastic nonlinear systems in Physics, Chemistry, and Biology. /Springer Series in Synergetics, Vol. 8/ Ed. by L. Arnold, R. Lefever. - Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1981, p.127.
4. Олемской А.И., Петрунин В.А. Перестройка конденсированного состояния атомов в условиях интенсивного внешнего воздействия // "Изв. вуз. Физика." - 1987, N1, с. 82-120.
5. Олемской А.И., Коплык И.В., Топоров Е.А. и др. Синергетика эволюции макроструктуры новой фазы // "Изв. вуз. Физика." - 1993, N1, с. 90-120.
6. Николис Дж. Динамика иерархически соподчиненных систем: Эволюционное представление. - М.: Мир, 1989. - 486 с.
7. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. - М.: Мир, 1987. - 400с.
8. Рюэль Д., Таккенс Ф. О природе турбулентности // В кн.: Странные аттракторы. - М.: Мир, 1981, с. 117-151.
9. Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое течение // В кн.: Странные аттракторы. - М.: Мир, 1981, с. 88-116.
10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1988. - 448 с.

Поступила в редколлегию 30 января 1995г.